2023 ORDINARIA – ÁLGEBRA

Pregunta B1.- Dado el sistema $\begin{cases}(a+1)x+4y=0\\ (a-1)y+z=3\\ 4x+2ay+z=3\end{cases}$, se pide:

a) (1,25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a
b) (0,5 puntos) Resolverlo para a=3.
c) (0,75 puntos) Resolverlo para a = 5.

$\begin{cases}(a+1)x+4y=0\\ (a-1)y+z=3\\ 4x+2ay+z=3\end{cases}$ a) Construimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a+1 & 4 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 1 & 3\\ 4 & 2a & 1 & 3\end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de A (matriz de coeficientes) calculando el determinante:

$$\begin{vmatrix} a+1 & 4 & 0\\ 0 & a-1 & 1\\ 4 & 2a & 1\end{vmatrix} = a^2-1+16+0-0-0-2a^2-2a = -a^2-2a+15$$

obtenemos los valores de "a" que hacen 0 el determinante: $a^2+2a-15=0 \rightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 15}}{2}$

$$a=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}\begin{cases}\frac{-2+8}{2}=\frac{6}{2}=3\\ \frac{-2-8}{2}=\frac{-10}{2}=-5\end{cases}$$

• Para $a\neq 3$ y $a\neq -5$ el Rango de A es 3, por tanto, también el de la ampliada por lo que: $R(A)=3=R(A^*)=3=$ nº incógnitas

SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. 1 SOLUCIÓN

• Si $a = 3$, estudiamos el rango de:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Usaremos el método de Gauss:

$F_3 = F_3 - F_1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Como las F2 y la F3 son iguales el rango es 2.

$R(A) = 2 = R(A^*) = 2 < 3 = n^o$ incógnitas

$\boxed{\text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, } \infty \text{ SOLUCIONES}}$

• Si $a = -5$, estudiamos el rango de:

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Usamos Gauss de nuevo:

$F3 = F3 + F1$

$$\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$ De nuevo F2 = F3, por tanto rango = 2

$R(A) = 2 = R(A^*) = 2 < 3 = n^o$ incógnitas

$\boxed{\text{SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO, } \infty \text{ SOLUC.}}$

b) Resolvemos para $a = 3$

Una vez aplicado Gauss, el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

Damos a $\boxed{z = \lambda}$, $2y + \lambda = 3 \rightarrow \boxed{y = \frac{3-\lambda}{2}}$

$4x = -4y \rightarrow x = -y \Rightarrow \boxed{x = \frac{-3+\lambda}{2}}$

c) Para $a=5$, el sistema queda:

$$\begin{cases} 6x+4y=0 \\ \quad\; 4y+z=3 \\ 4x+10y+z=3 \end{cases}$$

Ahora el sistema es compatible determinado, por lo que podemos resolverlo por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{5^2+2\cdot 5-15}=\frac{0+12+0-0-12-0}{20}=\frac{0}{20}=0$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{20}=\frac{18+0+0-0-0-18}{20}=\frac{0}{20}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 3 \end{vmatrix}}{20}=\frac{72+48+0-0-0-180}{20}=\frac{-60}{20}=-3$$