ESTADÍSTICA MADRID CIENCIAS (2020-2023) SOLUCIONES

2023 ORDINARIA –ESTADÍSTICA CIENCIAS

B.4. La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media ´ 175 mm y desviación típica 25.75 mm.
a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque ´ pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora? ´
b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm esten el ´ 18 % de las sardinas capturadas.
c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de ´ que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

$N(175, 25.75)$

a) $P(x>160) \underset{\text{TIPIFICAMOS}}{=} P\left(z > \frac{160-175}{25,75}\right) = P(z > -0,58) =$

$= P(z < 0,58) = \boxed{0,7190}$

b) $P(t < x < 175) = 0,18 \xrightarrow{\text{TIPIFICANDO}} P\left(\frac{t-175}{25.75} < z < 0\right) =$

$= \underbrace{P(z<0)}_{0,5} - P(z<a) = 0,18 \Rightarrow P(z<a) = 0,5 - 0,18$

$P(z<a) = 0,32$ Como $0,32 < 0,5$, a tiene que ser NEGATIVA, por tanto, $P(z<-a) = 1-0,32$

$P(z<-a) = 0,68 \Rightarrow -a = 0,465$

Sustituimos a: $-\frac{t-175}{25.75} = 0,465 \Rightarrow -t+175 = 11,97$

$t = 175 - 11,97 \Rightarrow \boxed{t = 163,03}$

c) $n=10$ $P(x<150)=?$ $P(y\geq 1)=?$ Al menos una.

Primero obtenemos la probabilidad de pescar una sardina menor de 150:

$$P(x<150)=P\left(z<\frac{150-175}{25.75}\right)=P(z<-0,97)=$$

$$=1-P(z<0,97)=1-0,8340=0,166$$

Ahora aplicamos la distribución binomial: $B(10, 0.166)$

$$P(y\geq 1)=1-P(y=0)$$

$$P(y=0)=\binom{n}{0}p^0\cdot(1-p)^n=\binom{10}{0}\cdot 1\cdot(1-0,166)^{10}=0,163$$

$$\boxed{P(y\geq 1)=1-0,163=0,837}$$

2023 MODELO –ESTADÍSTICA CCNN

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Una empresa complementa el sueldo de sus empleados según la consecución de ciertos objetivos valorados en función de una puntuación que sigue una distribución normal $N(100; 35)$. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular el porcentaje de empleados con una puntuación comprendida entre 100 y 140.

b) (0.75 puntos) Hallar la probabilidad de que un trabajador obtenga una puntuación inferior a 95 puntos.

c) (1 punto) Determinar la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos si el 75.17 % de la plantilla ha recibido dicho incentivo.

Solución

$X \equiv$ puntuación $\sim N(100; 35)$

a) $P(100 < X < 140) = P(0 < Z < 1.14) = 0.8729 - 0.5 = 0.3729 \Rightarrow 37.29\,\%$.
b) $P(X < 95) = P(Z < -0.14) = P(Z > 0.14) = 1 - 0.5557 = 0.4443$.
c) $P(X \geq k) = P\left(Z \geq \dfrac{k-100}{35}\right) = P\left(Z \leq \dfrac{-k+100}{35}\right) = 0.7517 \Rightarrow \dfrac{-k+100}{35} = 0.68 \Rightarrow k = 76.2$ es la puntuación mínima necesaria para cobrar los objetivos.

2022 ORDINARIA COINCIDENCIAS –ESTADÍSTICA CCNN

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una tienda se hace un estudio sobre la venta de dos productos A y B a lo largo de un mes. La probabilidad de que un cliente compre el producto A es de un 62 % y la de que compre el producto B es de un 40 %. Se observa, además, que el 12 % de los clientes compran al mismo tiempo el producto A y el producto B. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente haya comprado el producto A sabiendo que no ha adquirido el producto B.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un cliente no compre ni el producto A ni el producto B.

c) (1 punto) Sabiendo que a lo largo de un mes visitan la tienda 3000 personas, calcular, utilizando la aproximación de la distribución binomial mediante la distribución normal, cuál es la probabilidad de que compren el producto B más de 1250 personas.

Solución

a) Tenemos que: $P(A) = 0.62$, $P(B) = 0.40$ y $P(A \cap B) = 0.12$.
$P(A|\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{1 - P(B)} = \dfrac{5}{6}$.
b) $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.1$.
c) Tenemos $p = 0.4$, $q = 0.6$ y $n = 3000 \Rightarrow X \sim B(3000; 0.4)$.
Aproximación por la Normal: $X' \sim N(1200; 26.83)$.
$P(X > 1250) = P(X' \geqslant 1250.5) = P(Z \geqslant 1.88) = 0.0301$.

2022 ORDINARIA–ESTADÍSTICA CCNN

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según el Instituto Nacional de Estadística, durante el último trimestre de 2020, el porcentaje de mujeres que pertenecía al conjunto de Consejos de Administración de las empresas que componen el Ibex-35 fue del 27.7 %. Se reunieron 10 de estos consejeros.

a) (0.75 puntos) Halle la probabilidad de que la mitad fueran mujeres.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que hubiese al menos un hombre.

c) (1 punto) Determine, aproximando mediante una distribución normal, la probabilidad de que en un congreso de doscientos consejeros de estas empresas hubiera como mínimo un 35 % de representación femenina.

Solución

a) Sea $X =$ "número de mujeres en 10 consejeros", $X \sim B(10; 0.277)$.
$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.277^5 \cdot (1 - 0.277)^5 \approx 0.0811878.$
b) $1 - P(X = 10) = 1 - 0.277^{10} \approx 0.999997.$
c) Tenemos que $p = 0.277$, $q = 0.723$ y $n = 200$. Como $np > 5 \Rightarrow$ la variable X se puede aproximar por $X' \sim N(55.4; 6.33)$
$P(X \geqslant 70) = P(X' \geqslant 69.5) = P(Z \geqslant 2.23) = 1 - 0.9871 = 0.0129.$

2022 EXTRAORDINARIA –ESTADÍSTICA CCNN

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En una comunidad autónoma tres de cada cinco alumnos de segundo de bachillerato están matriculados en la asignatura de Matemáticas II. Se eligen 6 alumnos al azar de entre todos los alumnos de segundo de bachillerato. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente cuatro de ellos estén matriculados en Matemáticas II.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos esté matriculado en Matemáticas II.

c) (1 punto) Si en un instituto hay matriculados en segundo de bachillerato 120 alumnos, calcular, aproximando la distribución binomial mediante una distribución normal, la probabilidad de que más de 60 de estos alumnos estén matriculados en Matemáticas II.

Solución:

a) Tenemos $p = 0.6$, $q = 0.4$ y $n = 6 \Rightarrow X \sim B(6; 0.6)$.
$P(X = 4) = 0.31104.$
b) $P(X > 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0.004096 = 0.995904.$
c) Tenemos $p = 0.6$, $q = 0.4$ y $n = 120 \Rightarrow X \sim B(120; 0.6)$.
Aproximación por la Normal $N(72; 5.37)$.
$P(X > 60) = P(X' \geqslant 60.5) = P(Z \geqslant -2.14) = 0.9838.$

2022 MODELO –ESTADÍSTICA CCNN:

No hubo estadística, fueron dos de probabilidad

2021 ORDINARIA – CIENCIAS

A.4. El tiempo de vida de los individuos de cierta especie animal tiene una distribución normal con una media de 8.8 ´ meses y una desviación típica de 3 meses.

a) (1 punto) ¿Qué porcentaje de individuos de esta especie supera los 10 meses? ¿Qué porcentaje de individuos ha vivido entre 7 y 10 meses?

b) (1 punto) Si se toman al azar 4 especímenes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno no supere los ´ 10 meses de vida?

c) (0.5 puntos) ¿Qué valor de c es tal que el intervalo (8.8 − c, 8.8 + c) incluye el tiempo de vida (medido en meses) del 98 % de los individuos de esta especie?

$N(8.8,3)$ a) $P(X>10)=P\left(Z>\frac{10-8.8}{3}\right)=$

TIPIFICAMOS $\frac{X-\mu}{\sigma}$

$=P(Z>0,4)=1-P(Z<0,4)=1-0,6554=0.3446$

$\boxed{\text{El porcentaje pedido es: } 34,46\%}$

$P(7<X<10)=\left(\frac{7-8.8}{3}<Z<\frac{10-8.8}{3}\right)=P(-0,6<Z<0,4)=$

$P(Z<0,4)-P(Z<-0.6)=P(Z<0,4)-1+P(Z<0,6)=$

$=0,6554-1+0,7257=1,3811-1=0,3811$

$\boxed{\text{El porcentaje pedido es: } 38,11\%}$

b) $n=4$ Prob al menos 1 NO SUPERE los 10 meses

Ahora estamos en una binomial, en la que $n=4$

y $p=0,6554$ (que no supere los 10 meses)

$B(4,0.6554)$ $P(X\geq 1)=1-P(X=0)=(*)$

Aplicamos la fórmula de la distribución binomial

$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$ para $k=0$

$(*)=1-\binom{4}{0}\cdot 0,6554^0\cdot 0,3446^4=1-0,0141=\boxed{0,9859}$

c) $c = ?$ $P(8.8 - c < X < 8.8 + c) = 0{,}8$

El valor que toma muestra es: $8{,}8 - c$ por un lado y $8{,}8 + c$ por otro.

Tipificamos: $P\left(\frac{\cancel{8.8} - c - \cancel{8.8}}{3} < Z < \frac{\cancel{8.8} + c - \cancel{8.8}}{3}\right) =$

$= P\left(-\frac{c}{3} < Z < \frac{c}{3}\right) = 2P\left(Z < \frac{c}{3}\right) - 1 = 0{,}98$

$P\left(Z < \frac{c}{3}\right) = \frac{1 + 0{,}98}{2} = 0{,}99 \xrightarrow[\text{INVERSA}]{\text{TABLA}} \boxed{Z = 2{,}325}$

$\frac{c}{3} = 2{,}325 \Longrightarrow \boxed{c = 3 \cdot 2{,}325 = 6{,}975}$

2021 EXTRAORDINARIA –ESTADÍSTICA CCNN

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Según las estadísticas meteorológicas, en una ciudad nórdica llueve un promedio del 45 % de los días. Un climatólogo analiza los registros pluviométricos de 100 días elegidos al azar entre los de los últimos 50 años.

a) (1 punto) Exprese cómo calcular con exactitud la probabilidad de que en 40 de ellos haya llovido.

b) (1.5 puntos) Calcule dicha probabilidad aproximándola mediante una normal.

Solución

a) $X \sim B(100; 0.45) \Rightarrow P(X=40) = \binom{100}{40} 0.45^{40} 0.55^{60}$.
b) Con $\mu = np = 100 \cdot 0.45 = 45$, $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0.45 \cdot 0.55} = \sqrt{24.75}$, aproximando con la normal:

$$P_{\text{Binom}}(X=40) \approx P_{\text{Normal}}(39.5 \leq X \leq 40.5) = P\left(\frac{39.5-45}{\sqrt{24.75}} \leq \frac{X-45}{\sqrt{24.75}} \leq \frac{40.5-45}{\sqrt{24.75}}\right)$$
$$= P(-1.11 \leq Z \leq -0.9) = P(1.11) - P(0.9) = 0.8665 - 0.8159 = 0.0506.$$

2021 MODELO –ESTADÍSTICA CCNN

A.4 Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un instituto uno de cada cuatro alumnos practica baloncesto. Se eligen 6 alumnos al azar y se considera la variable aleatoria X que representa el número de estudiantes entre estos 6 que práctican baloncesto. Se pide:

a) (1 punto) Identificar la distribución de la variable aleatoria X y calcular $P(X=0)$.
b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 5 de los 6 elegidos practiquen baloncesto.
c) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que al menos 1 de los 6 practique baloncesto.

Solución

a) Se trata de una distribución binomial $X \sim B(6, 0.25)$, $P(X=0) = 0.75^6 \approx 0.18$.
b) $P(X>4) = P(X=5) + P(X=6) = \binom{6}{5} 0.25^5 \cdot 0.75 + \binom{6}{6} 0.25^6 \approx 0.004638$
c) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.75^6 \approx 0.82$

2020 ORDINARIA –ESTADÍSTICA CCNN

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un arquero aficionado dispone de 4 flechas y dispara a un globo colocado en el centro de una diana. La probabilidad de alcanzar el blanco en el primer tiro es del 30%. En los lanzamientos sucesivos la puntería se va afinando, de manera que en el segundo es del 40%, en el tercero del 50% y en el cuarto del 60%. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que el globo haya explotado sin necesidad de hacer el cuarto disparo.
b) (0.5 puntos) Calcular la probabilidad de que el globo siga intacto tras el cuarto disparo.
c) (1 punto) En una exhibición participan diez arqueros profesionales, que aciertan un 85% de sus lanzamientos. Calcular la probabilidad de que entre los 10 hayan explotado exactamente 6 globos al primer disparo.

Solución

a) Denotamos por A_j la probabilidad de acertar en el lanzamiento j, y por F_j la probabilidad de fallar en ese lanzamiento.

$$P(A_1) + P(F_1 \cap A_2) + P(F_1 \cap F_2 \cap A_3) = 0.3 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 = 0.79.$$

b) $P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) = 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.5 \cdot 0.4 = 0.084.$
c) Tenemos 10 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = 0.85$ de manera que

$$P(\text{6 aciertos}) = \binom{10}{6} 0.85^6 \cdot 0.15^4 \approx 0.0400957.$$

2020 ORDINARIA COINCIDENTES –ESTADÍSTICA CCNN

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El peso de las crías recién nacidas de una especie de primates sigue una distribución normal X de media $\mu = 3353$ gramos. Sabiendo que $P(X > 3693) = 0.2$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular la desviación típica, σ, de la distribución de pesos.
b) (1 punto) Calcular el valor x_0 tal que $P(X < x_0) = 0.2$.

Solución

a)

$$0.8 = P(X \leq 3693) = P\left(\frac{X - 3353}{\sigma} \leq \frac{3693 - 3353}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{340}{\sigma}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{340}{\sigma} \approx 0.84 \Rightarrow \boxed{\sigma \approx 404.76 \text{ gramos}}.$$

b) Tenemos una distribución simétrica respecto de su media $\mu = 3353$. Sabemos que $P(X > 3693) = 0.2$. Como $3693 = \mu + 340$ y la distribución es simétrica, resulta que $P(X < \mu - 340) = 0.2$, es decir $P(X < 3013) = 0.2$. Por tanto, el valor buscado es $x_0 = 3013$ gramos.

2020 EXTRAORDINARIA–ESTADÍSTICA CCNN

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En un experimento aleatorio hay dos sucesos independientes X, Y. Sabemos que $P(X) = 0.4$ y que $P(X \cap \overline{Y}) = 0.08$ (donde $\overline{Y}$ es el suceso complementario de Y). Se pide:

a) (1 punto) Calcular $P(Y)$.
b) (0.5 puntos) Calcular $P(X \cup Y)$.
c) (1 punto) Si X es un resultado no deseado, de manera que consideramos que el experimento es un éxito cuando NO sucede X, y repetimos el experimento en 8 ocasiones, hallar la probabilidad de haber tenido éxito al menos 2 veces.

Solución

a) Al ser X e Y independientes, tenemos que

$$0.08 = P(X \cap \overline{Y}) = P(X) - P(X \cap Y) = P(X) - P(X)\,P(Y) = 0.4(1 - P(Y)) \Rightarrow 1 - P(Y) = 0.2 \Rightarrow P(Y) = 0.8.$$

b) $P(X \cup Y) = P(X) + P(Y) - P(X \cap Y) = P(X) + P(Y) - P(X)\,P(Y) = 0.8 + 0.4 - 0.32 = 0.88.$
c) Se trata de 8 pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $p = P(\overline{X}) = 1 - 0.4 = 0.6$, y queremos hallar la probabilidad de tener al menos 2 éxitos (llamamos n al número de éxitos):

$$P(n \geq 2) = 1 - P(n = 0) - P(n = 1) = 1 - \binom{8}{0} 0.6^0 0.4^8 - \binom{8}{1} 0.6^1 0.4^7 = 0.99148032.$$

2020 MODELO –ESTADÍSTICA CCNN

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En cierta ciudad se estima que la temperatura máxima de cada día, en el mes de junio, sigue una distribución normal de media 30ºC y varianza 25. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que un día cualquiera del mes la temperatura máxima esté entre 28ºC y 32ºC.
b) (1 punto) Calcular el número esperado de días del mes con máxima superior a 36ºC.
c) (0.75 puntos) Determinar la temperatura máxima alcanzada el día 10 de junio, sabiendo que dicha temperatura fue superada exactamente el 50% de los días del mes.

Solución

Sea $X \sim N(30, 5)$ la variable aleatoria "temperatura máxima" y $Z = \dfrac{x - 30}{5}$ la variable normalizada asociada.

a) $P(28 < X < 32) = P(-0.4 < Z < 0.4) = 2P(Z < 0.4) - 1 = 0.3108.$

b) $P(X > 36) = P(Z > 1.2) = 1 - P(Z < 1.2) = 0.1151.$ El número esperado de días es $30 \cdot 0.1151 \approx 3.45.$ $\boxed{\text{Cabe esperar que entre 3 y 4 días del mes se superen los 36º}}$.

c) Se trata de hallar a tal que $P(X > a) = 0.5$ y esto es justamente el valor medio de la variable. Luego $\boxed{\text{el día 10 de junio se alcanzaron } 30^{\circ}}$.