2023 ORDINARIA – GEOMETRÍA CIENCIAS

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano π: x-z=2 y el punto A(1, 1, 1) se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.

b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.

c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \quad P(1,0,-1) \quad \vec{r} = (2,1,-2)$

$\pi \equiv x - z = 2 \quad \vec{n} = (1,0,-1) \quad A(1,1,1)$

a) Posición relativa. Obtendremos el producto escalar de $\vec{r}$ y $\vec{n}$: $\vec{r} \cdot \vec{n} = (2,1,-2) \cdot (1,0,-1) = 2+0+2 = 4 \neq 0$

Como el producto escalar no es nulo, la recta y el plano SE CORTAN

Para obtener el punto de corte, pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1-2\lambda \end{cases}$

Ahora sustituimos x, y, z en la ecuación de π:

$\pi \equiv x - z = 2 \rightarrow (1+2\lambda) - (-1-2\lambda) = 2 \Rightarrow 1+2\lambda+1+2\lambda = 2$

$2+4\lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 0}$

Sustituimos λ en r: $\boxed{I(1+2\cdot 0, 0, -1-2\cdot 0) = (1,0,-1)}$

b) Proyección de A sobre π

Obtenemos la perpendicular a π que pasa por A

$s: \vec{n}, A \Rightarrow s: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1}$

Ec. paramétrica: $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1-\lambda \end{cases}$

Ahora buscamos la intersección de s con π.

$\pi: x - z = 2 \rightarrow (1+\lambda) - (1-\lambda) = 2 \rightarrow 1 + \lambda - 1 + \lambda = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1}$

$A'(1+1, 1, 1-1) \Rightarrow \boxed{A'(2,1,0)}$ Proyección de A sobre π

c) Simétrico de A respecto de r.

obtenemos el plano α perpendicular a r y que contiene a A

$\alpha: 2x + y - 2z = d \rightarrow 2\cdot 1 + 1 - 2\cdot 1 = d \Rightarrow \boxed{d = 1}$

$\boxed{\alpha: 2x + y - 2z = 1}$ obtenemos el corte de α y r:

$2\cdot(1+2\lambda) + \lambda - 2(-1-2\lambda) = 1$

$2 + 4\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda = 1 \Rightarrow 9\lambda = -3 \rightarrow \boxed{\lambda = -1/3}$

$B\left(1 + 2\cdot\frac{-1}{3}, -1/3, -1 - 2\frac{-1}{3}\right) \Rightarrow \boxed{B(1/3, -1/3, -1/3)}$

Aplicamos la fórmula del punto medio: $M = \frac{A+B}{2}$

M es B, A es A y B es A' que buscamos:

$$(1/3, -1/3, -1/3) = \frac{(1,1,1) + (x,y,z)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} = 1 + x \Rightarrow x = -1/3 \\ -\frac{2}{3} = 1 + y \Rightarrow y = -5/3 \\ -\frac{2}{3} = 1 + z \Rightarrow z = -5/3 \end{cases}$$

$\boxed{A'(-1/3, -5/3, -5/3)}$