2023 ORDINARIA – ANÁLISIS CIENCIAS

B.2. Dada la función real de variable real definida sobre el dominio como $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2+x^2} & si \quad x\leq -1\\ \frac{2x^2}{3-3x} & si \quad x>-1\end{cases}$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx$

a) CONTINUIDAD. EN PRIMER LUGAR, ESTUDIAMOS EL DOMINIO.

En el segundo trozo estudiamos cuando el denominador se anule $3-x\cdot 3=0 \rightarrow x=1$, POR TANTO:

$\text{dom } f: \mathbb{R}-\{1\}$ LA FUNCIÓN es continua en todo su dominio por ser racionales (a falta de $x=-1$):

Estudiamos en $x=-1$

$f(-1)=\frac{(-1)^2}{2+(-1)^2}=\frac{1}{3}$ $\quad \lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^2}{2+x^2}=\frac{1}{3}$ //

$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{2x^2}{3-3x}=\frac{2(-1)^2}{3-3(-1)}=\frac{2}{6}=1/3$

Como los limites laterales son iguales e igual al valor de $f(-1)$ la función es continua en $x=1$, y por tanto, en todo su dominio.

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$ Como $x \to -\infty$ tomaremos el primer trozo de función

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = 1^{\infty} \text{ IND. TOMAMOS logaritmos:}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = \lambda \to \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1} = \ln\lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^2-1)\cdot\ln\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right) = -\infty\cdot 0 \to \text{IND.}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\frac{x^2}{2+x^2}}{\frac{1}{2x^2-1}} \overset{\text{L'HÔPITAL}}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2+x^2}{x^2}\cdot\frac{2x(2+x^2)-x^2\cdot 2x}{(2+x^2)^2}}{\frac{-4x}{(2x^2-1)^2}} =$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(2+x^2)(4x+\cancel{2x^3}-\cancel{2x^3})\cdot(2x^2-1)^2}{-4x\cdot x^2\cdot(2+x^2)^2}$$ Aplicando la regla de los grados

$G(N)=7$
$G(D)=7$ } como los grados son iguales:

$C(N)=16$, $C(D)=-4$. $\lim = \frac{16}{-4} = -4$

$$\ln\lambda = -4 \to \lambda = e^{-4} = \frac{1}{e^4}.$$

$\boxed{\text{El valor de límite pedido es } 1/e^4}$

c) $\int_{-1}^{0} f(x)\cdot dx$ Para los valores entre -1 y 0 tendremos que usar el segundo tramo de $f(x)$:

$\int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3-3x}\,dx$ En primer lugar, obtendremos la primitiva:

$\int \frac{2x^2}{3-3x}\,dx$ dividimos numerador y denominador

$$\begin{array}{l|l} \cancel{2x^2} & -3x+3 \\ \hline -\cancel{2x^2}+2x & -\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \\ \hline \cancel{2x} & \\ -\cancel{2x}+2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$F=\int\left(-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}+\frac{2}{3-3x}\right)dx=$$

$$=\int -\frac{2}{3}x\,dx+\int -\frac{2}{3}\,dx+\int \frac{2}{3-3x}\,dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\frac{x^2}{2}-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\ln|3-3x|$$

$F(0)=-\frac{2}{9}\ln 3$ $\quad F(-1)=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\ln 6$

Aplicamos la regla de Barrow:

$$F(0)-F(-1)=-\frac{2}{3}\ln 3+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\ln 6=$$

$$=\frac{1}{3}\left(2\ln 6-2\ln 3-1\right)=\frac{1}{3}\left(\ln\frac{6^2}{3^2}-1\right)=\boxed{\frac{1}{3}(\ln 4-1)=0{,}129}$$