2023 ORDINARIA COINCIDENTES – ÁLGEBRA

A.1. Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro a.

b) (1 punto) Calcular, en el caso de que exista, la inversa de A para a=0.

c) (0,5 puntos) Resolver el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) $A = \begin{pmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{pmatrix}$ Para obtener el rango obtendremos el determinante y lo igualaremos a 0. Los valores que NO lo anulen harán que el rango de A sea 3:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ a & 3 & -6 \\ a+1 & 1 & a \end{vmatrix} = 6a^2 - 6a - 6 + a - 3a - 3 - a^2 + 12a = 0$$

$$5a^2 + 4a - 9 = 0 \rightarrow a = \frac{-4 \pm \sqrt{16+180}}{10} = \frac{-4 \pm 14}{10} \begin{cases} \frac{-4+14}{10} = 1 \\ \frac{-4-14}{10} = \frac{-9}{5} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Para } a \neq 1 \text{ y } a \neq -\frac{9}{5} \text{ el rango de A es 3}}$

$\boxed{\text{Si } a = 1} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $F1 = F3 \neq F2 \Rightarrow \boxed{\text{Rango } 2}$

$\boxed{\text{Si } a = -\frac{9}{5}} \Rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} & 1 & 1 \\ -9/5 & 3 & -6 \\ -4/5 & 1 & -9/5 \end{pmatrix} \rightarrow \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{Rango } 2}$

b) Inversa para $a=0$. Si $a=0$ $|A| = 5 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 - 9 = -9 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A^T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad A^T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = -6-3 = -9$$

$$A^T_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad A^T_{22} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A^T_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

$$A^T_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -3 \quad A^T_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A^T_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$Adj(A^T) = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{Adj(T)}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & 1 & -9 \\ -6 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-9}$$

$$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & -1/9 & 1 \\ \frac{2}{3} & 1/9 & 0 \\ \frac{1}{3} & -1/9 & 0 \end{pmatrix}}$$

c) Resolver:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para $a=1$, $R(A) = 2 = R(A^*) < 3 = n^o$ incógnitas

Portanto, es un SISTEMA COMPATIBLE INDETERM.

INFINITAS SOLUCIONES:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \end{cases} \quad EC1 = EC1 \cdot 6 \quad \begin{cases} 12x + 6y + 6z = 0 \\ x + 3y - 6z = 0 \end{cases} +$$

$$13x + 9y = 0$$

$$\boxed{y = \lambda} \Rightarrow \boxed{x = \frac{-9\lambda}{13}}$$

$$\boxed{z = -2x - y = \frac{18\lambda}{13} - \lambda = \frac{5\lambda}{13}}$$